

# PERANCANGAN BEJANA TEKAN BERDIMENSI SATU DENGAN MENGGUNAKAN METODE ELEMEN HINGGA

Tony Yulianto, Faisol, Rica Amalia, Kuzairi, M. Fariz Fadillah Mardianto  
Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Islam Madura (UIM)  
Kampus Hijau Komplek PP. Miftahul Ulum Bettet, Pamekasan 69351  
*e-mail*: toni\_yulianto65@ymail.com

**Abstrak**—Salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial biasa adalah metode elemen hingga, dalam paper ini diberikan simulasi penerapan metode tersebut untuk menyelesaikan masalah nilai batas khususnya untuk mengukur besar defleksi dari bejana tekan. Diberikan pula perbandingan galat dari dua cara perhitungan, yaitu metode elemen hingga dengan metode beda hingga yang pernah diteliti sebelumnya. Hasilnya menunjukkan bahwa perhitungan dengan cara elemen hingga lebih baik dibandingkan dengan beda hingga.

**Kata Kunci**—Beda Hingga, Bejana Tekan, Elemen Hingga, numerik, persamaan differensial biasa.

## I. PENDAHULUAN

SUATU permasalahan yang ditemui dalam kehidupan sehari-hari dapat dimodelkan dengan menggunakan persamaan matematika. Salah satu bentuk persamaan matematika yang digunakan adalah persamaan differensial. Tidak semua persamaan persamaan differensial dapat diselesaikan secara analitis, maka alternatif yang dapat digunakan adalah dengan mensimulasikan model melalui pendekatan numerik [6]. Metode elemen hingga banyak diteliti karena perhitungannya yang lebih teliti dan akurat daripada metode numerik lainnya dalam pendekatan dengan hasil analitiknya.

Hal penting yang perlu diperhatikan dalam mencari solusi numerik adalah perhitungan galat (*error*) dari perhitungan numerik terhadap hasil *realnya* (solusi analitik). Untuk itu dalam jurnal ini selain dijelaskan penerapan metode elemen hingga pada permasalahan bejana tekan [3], juga akan dibandingkan dengan solusi numerik yang menggunakan metode beda hingga dengan perbandingan pada perhitungan analitik dari permasalahan persamaan differensial pada kasus yang diberikan. Di bagian akhir ditunjukkan galat pada perhitungan metode elemen hingga lebih baik daripada menggunakan metode beda hingga.

## II. URAIAN PENELITIAN

### II.1. Penelitian Sebelumnya

Pada penelitian sebelumnya, perancangan bejana tekan diselesaikan menggunakan metode numerik, yaitu metode beda hingga dan dibandingkan antara beda maju dengan beda

tengah dan dihasilkan galat dari beda tengah relatif lebih baik daripada menggunakan beda maju [4]. Pada penelitian ini akan dibandingkan hasil penelitian sebelumnya yang menggunakan metode beda tengah dengan metode elemen hingga dengan harapan diperoleh penyelesaian yang lebih baik dalam tingkat akurasi.

### II.2. Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah metode yang mengubah setiap derivatif dari persamaan diferensial menjadi bentuk *difference* (beda) dengan menggunakan ekspansi deret Taylor. Andaikan  $u(x)$  adalah solusi dari persamaan diferensial.  $\Delta x$  adalah besar pertambahan untuk variabel  $x$  [4]. Maka dari ekspansi deret Taylor diperoleh

$$u(x + \Delta x) = u(x) + u'(x) \Delta x + \frac{1}{2} u''(x) (\Delta x)^2 + \frac{1}{6} u'''(x) (\Delta x)^3 + O(\Delta x)^4 \quad (1)$$

Jika  $\Delta x$  diganti dengan  $-\Delta x$ , maka diperoleh

$$u(x - \Delta x) = u(x) - u'(x) \Delta x + \frac{1}{2} u''(x) (\Delta x)^2 - \frac{1}{6} u'''(x) (\Delta x)^3 + O(\Delta x)^4 \quad (2)$$

Dengan mengurangkan kedua persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x) = 2u'(x) \Delta x + O(\Delta x)^2 \quad (3)$$

sehingga untuk turunan pertama dari persamaan (3) diperoleh

$$u'(x) = \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (4)$$

Persamaan (4) disebut beda tengah orde pertama.

Sedangkan untuk mendapatkan pendekatan turunan kedua dilakukan dengan menjumlahkan kedua persamaan (1) dan (2) kembali dan diperoleh

$$u(x + \Delta x) + u(x - \Delta x) = 2u(x) + u''(x) (\Delta x)^2 + O(\Delta x)^3 \quad (5)$$

sehingga dari persamaan (5) diperoleh turunan kedua

$$u''(x) = \frac{u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^3 \quad (6)$$

Persamaan (6) disebut beda tengah orde kedua.

Jika persamaan (4) dan (6) diamati dalam selang interval  $[x_0, x_N]$ , maka  $\Delta x = \frac{x_N - x_0}{N}$  adalah panjang interval yang membagi  $[x_0, x_N]$  menjadi  $N$  bagian sama besar.

Secara khusus metode ini akan diterapkan untuk menyelesaikan persamaan differensial biasa orde dua dengan diketahui nilai batasnya (*boundary value*) [7].

II.3. Metode Elemen Hingga

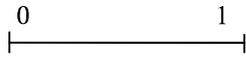
Dalam metode elemen hingga ada fungsi basis di dalamnya, fungsi basis adalah fungsi yang digunakan untuk membantu mencari fungsi interpolasi [5].

Adapun fungsi basis dibagi menjadi 3 yaitu:

- a. Fungsi basis linear
- b. Fungsi basis kuadratik
- c. Fungsi basis kubik.

II.3.1. Aplikasi fungsi basis berbentuk satu dimensi

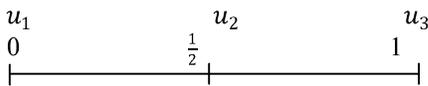
1. Fungsi Basis Berbentuk Linear



$\varphi_1(\xi) = (\xi - 1)$  untuk memperoleh satuan maka dibalik.

$$\varphi_2(\xi) = (\xi - 0)$$

2. Fungsi Basis Berbentuk Kuadratik



Jika diuraikan [1]:  $\varphi_1(\xi) = (\xi - 0)(\xi - \frac{1}{2})(\xi - 1)$   
 $\varphi_2(\xi) = (\xi - 0)(\xi - \frac{1}{2})(\xi - 1)$   
 $\varphi_3(\xi) = (\xi - 0)(\xi - \frac{1}{2})(\xi - 1)$

3. Fungsi Basis Berbentuk Kubik



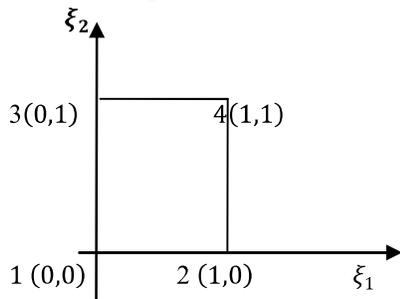
Jika dijabarkan:

$$\varphi_1(\xi) = \frac{9}{2} \left(\xi - \frac{1}{3}\right) \left(\xi - \frac{2}{3}\right) (1 - \xi)$$

$$\varphi_2(\xi) = \frac{27}{2} \xi \left(\xi - \frac{2}{3}\right) (\xi - 1)$$

II.3.2. Fungsi Basis Berbentuk Dua Dimensi

1. Fungsi Basis Bilinear



Dengan

$$u(\xi_1, \xi_2) = \varphi_1(\xi_1, \xi_2)u_1 + \varphi_2(\xi_1, \xi_2)u_2 + \varphi_3(\xi_1, \xi_2)u_3 + \varphi_4(\xi_1, \xi_2)u_4$$

Jika diuraikan [1]:

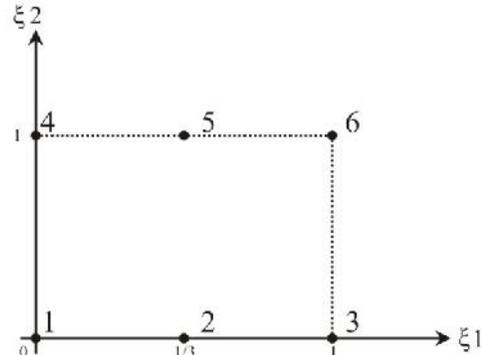
$$\varphi_1(\xi_1, \xi_2) = (1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \rightarrow \xi_1 = 0, \xi_2 = 1$$

$$\varphi_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_1(1 - \xi_2)\xi_1 = 0, \xi_2 = 1 \rightarrow 0 = 1 - \xi_2$$

$$\varphi_3(\xi_1, \xi_2) = (1 - \xi_1)\xi_2 \rightarrow \xi_1 = 1, \xi_2 = 0$$

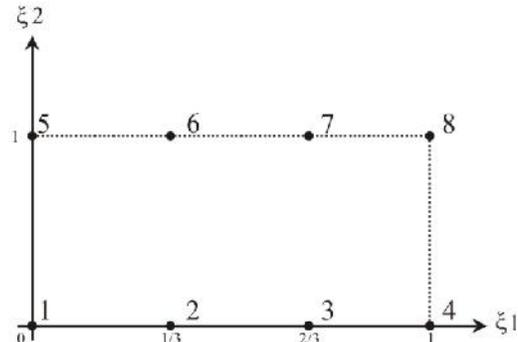
$$\varphi_4(\xi_1, \xi_2) = \xi_1$$

2. Fungsi Basis Biparabolik



Untuk menentukan rumusnya adalah sama dengan menentukan fungsi basis bilinear.

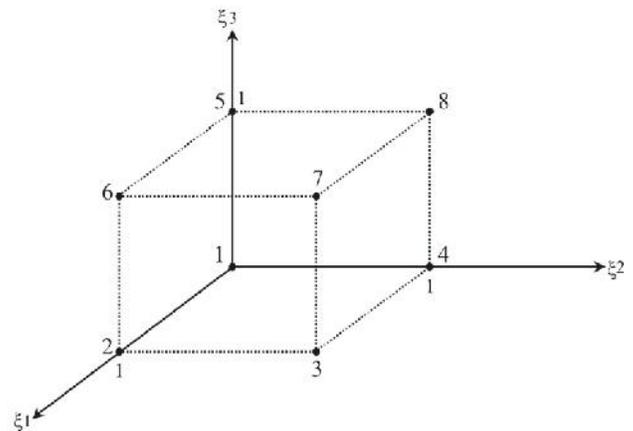
3. Fungsi Basis Bikubik



Untuk menentukan rumusnya adalah sama dengan menentukan fungsi basis bilinear.

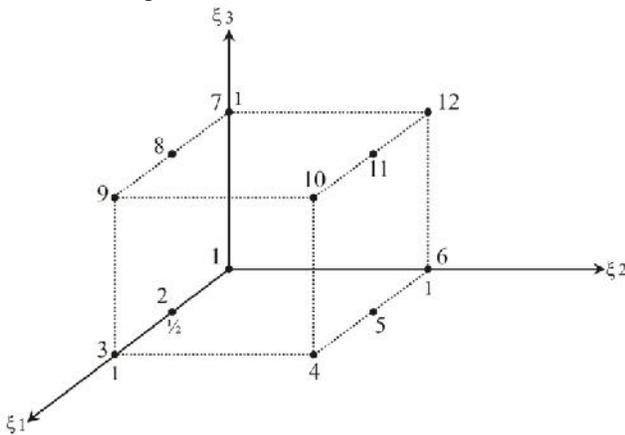
II.3.3. Fungsi Basis Berbentuk Tiga Dimensi

1. Trilinear



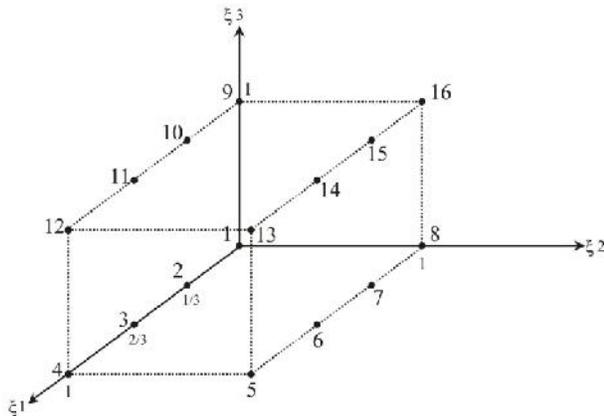
Untuk menentukan rumusnya adalah sama dengan menentukan fungsi basis parabolik dan kubik.

2. Triparabolik



Untuk menentukan rumusnya adalah sama dengan menentukan fungsi basis parabolik dan kubik.

3. Trikubik



Untuk menentukan rumusnya adalah sama dengan menentukan fungsi basis parabolik dan kubik yang telah diuraikan di atas.

III. Penerapan Metode Elemen Hingga dan Beda Hingga Pada Defleksi Balok

Model Matematika dari persamaan differensial yang menggambarkan besar peregangan  $y$  (defleksi) dari sebuah balok pada Gambar 3.1 yang diberi penyangga pada kedua sisi [4]:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{Ty}{EI} = \frac{qx(L-x)}{2EI} \quad (7)$$

dengan

$x$  = lokasi di sepanjang balok (inchi)

$E$  = modulus Young / modulus elastisitas balok (pon/inchi<sup>2</sup>)

$T$  = beban poros (pon)

$I$  = momen area kedua (inchi<sup>6</sup>)

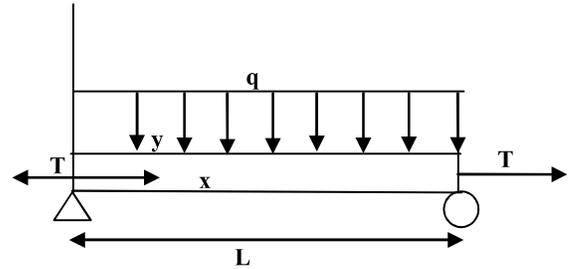
$q$  = intensitas tekanan secara seragam (pon/inchi)

$L$  = panjang balok (inchi)

Kondisi batas yang diberikan adalah  $y(x=0) = 0$  dan  $y(x=L) = 0$ . Diketahui pula  $T = 7200$  pon,  $q = 5400$  pon/inchi,  $L = 75$  inchi,  $E = 30 \times 10^6$  pon/inchi<sup>2</sup> dan  $I = 120$

inchi<sup>6</sup>.

Dengan metode elemen hingga, maka persamaan (7) dimasukkan ke dalam Teorema Green sebagai fungsi residual, sehingga diperoleh [2]:



Gambar. 3.1. Balok yang diberi penyangga

Perhitungan numerik menggunakan metode elemen hingga untuk kasus ini dengan dibentuk ke dalam Teorema Green dengan dimasukkan kondisi batas dan residualnya [2]:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{Ty}{EI} - \frac{qL}{2EI}x + \frac{q}{2EI}x^2 \right) \omega dx = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2y}{dx^2} \omega dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{Ty}{EI} \omega dx + \left[ -\frac{1}{2} \frac{qL}{2EI} x^2 \omega + \frac{1}{3} \frac{q}{2EI} x^3 \omega \right]_{x_1}^{x_2} = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \omega d \left( \frac{dy}{dx} \right) - \int_{x_1}^{x_2} \frac{T}{EI} \omega y dx + \left[ \omega x^2 \frac{q}{2EI} \left( \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}L \right) \right]_{x_1}^{x_2} = 0$$

$$\left[ \omega \frac{dy}{dx} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dy}{dx} \omega dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{T}{EI} \omega y dx + \left[ \omega x^2 \frac{q}{2EI} \left( \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}L \right) \right]_{x_1}^{x_2} = 0 \quad (8)$$

Dari persamaan (8) dengan fungsi yang di sebelah kiri yang tidak mengandung integral dipindah ke ruas kanan jadi diperoleh bentuk LHS (Left Hand Side) dan RHS (Right Hand Side) [5]:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dy}{dx^2} d\omega dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{T}{EI} \omega y dx$$

$$= \left[ \omega \left( \frac{dy}{dx} + x^2 \frac{q}{2EI} \left( \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}L \right) \right) \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{dy}{dx^2} d\omega + \frac{T}{EI} \omega y \right) dx = \left[ \omega \left( \frac{dy}{dx} + x^2 \frac{q}{2EI} \left( \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}L \right) \right) \right]_{x_1}^{x_2} \quad (9)$$

Dengan menggunakan metode elemen hingga yang bilinear, maka persamaan (9) diperoleh:

$$y(\xi) = \varphi_1(\xi) t_1 + \varphi_2(\xi) t_2 + \varphi_3(\xi) t_3 + \varphi_4(\xi) t_4 \quad (10)$$

Dari persamaan (10) diketahui:

$$\varphi_1(\xi) = \frac{(\xi - \frac{1}{3})(\xi - \frac{2}{3})(\xi - 1)}{(0 - \frac{1}{3})(0 - \frac{2}{3})(0 - 1)}$$

$$= \frac{9}{2} \left( \xi - \frac{1}{3} \right) \left( \xi - \frac{2}{3} \right) (1 - \xi)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(\xi) &= \frac{(\xi - 0)\left(\xi - \frac{2}{3}\right)(\xi - 1)}{\left(\frac{1}{3} - 0\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3} - 1\right)} = \frac{27}{2} \xi \left(\xi - \frac{2}{3}\right) (\xi - 1) \\ \varphi_3(\xi) &= \frac{(\xi - 0)\left(\xi - \frac{1}{3}\right)(\xi - 1)}{\left(\frac{2}{3} - 0\right)\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3} - 1\right)} = \frac{27}{2} \xi \left(\xi - \frac{1}{3}\right) (1 - \xi) \\ \varphi_4(\xi) &= \frac{(\xi - 0)\left(\xi - \frac{1}{3}\right)\left(\xi - \frac{2}{3}\right)}{(1 - 0)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\right)} = \frac{9}{2} \xi \left(\xi - \frac{1}{3}\right) \left(\xi - \frac{2}{3}\right) \quad (12) \\ y &= \varphi_i t_i \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{dan} \quad w = \varphi_j \quad j = 1, 2, 3, 4 \\ x &= \frac{1}{n} \xi \text{ dan } \frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Maka persamaan (9) diubah sesuai teorema Green untuk dimasukkan metode elemen hingga dari persamaan (10):

$$\int_x \cdot dx + \int_x \cdot dx + \dots + \int_x \cdot dx \quad (11)$$

Ambil 1 elemen dari persamaan (11) dan (12) diperoleh [2]:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \int_{\xi=0}^{\xi=1} \left( \frac{dy}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dw}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} + \frac{T}{EI} \right) \frac{dx}{d\xi} d\xi \\ &= \int_{\xi=0}^{\xi=1} \left( \frac{d\varphi_i}{d\xi} t_i \cdot n \frac{d\varphi_j}{d\xi} \cdot n + \frac{T}{EI} \varphi_j \varphi_i t_i \right) \frac{1}{n} d\xi \\ &= \frac{1}{n} t_i \int_{\xi=0}^{\xi=1} \left( n^2 \frac{d\varphi_i}{d\xi} \frac{d\varphi_j}{d\xi} + \frac{T}{EI} \varphi_j \varphi_i \right) d\xi \quad (13) \end{aligned}$$

Sehingga dengan mengambil  $i = 1$  dan  $j = 1$  dari persamaan (13) diperoleh:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{n} t_1 \int_{\xi=0}^{\xi=1} \left( n^2 \frac{d\varphi_1}{d\xi} \frac{d\varphi_1}{d\xi} + \frac{T}{EI} \varphi_1 \varphi_1 \right) d\xi \\ &= \frac{1}{n} t_1 \int_{\xi=0}^{\xi=1} \left( n^2 \left( \frac{9}{2} \left( -3\xi^2 + 4\xi \frac{11}{9} \right) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{T}{EI} \left( \frac{9}{2} \left( -\xi^3 + 2\xi^2 - \frac{11}{9} \xi + \frac{2}{9} \right) \right)^2 \right) d\xi \\ &= \left( \frac{9}{2} \right) \frac{21}{n} t_1 \int_{\xi=0}^{\xi=1} \left( n^2 \left( 9\xi^4 - 24\xi^3 + \frac{10}{3} \xi^2 - \frac{88}{9} \xi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{121}{81} \right) + \frac{T}{EI} \right. \\ &\quad \left. + \left( \xi^6 - 4\xi^5 + \frac{58}{9} \xi^4 - \frac{48}{9} \xi^3 + \frac{193}{81} \xi^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{44}{81} \xi + \frac{4}{81} \right) \right) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{181}{4n} t_1 \int_{\xi=0}^{\xi=1} \frac{T}{EI} \xi^6 - \frac{4T}{EI} \xi^3 + \left( 9n^2 + \frac{58T}{9EI} \right) \xi^4 \\ &\quad + \left( -24n^2 - \frac{48T}{9EI} \right) \xi^3 \\ &\quad + \left( \frac{70}{3} n^2 + \frac{193T}{81EI} \right) \xi^2 \\ &\quad + \left( -\frac{88}{9} n^2 - \frac{44T}{81EI} \right) \xi \\ &\quad + \left( \frac{121}{81} n^2 + \frac{4T}{81EI} \right) \xi \end{aligned}$$

Sedangkan kalau model tersebut dikerjakan menggunakan metode beda hingga diperoleh [7]:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} - \frac{T}{EI} y_i = \frac{q(L - x_i)}{2EI} \quad (14)$$

Sehingga persamaan (14) dapat disederhanakan menjadi  $2EI y_{i-1} - 2[2EI + T(\Delta x)^2] y_i + 2EI y_{i+1} = qL(\Delta x)^2 x_i - q(\Delta x)^2 x_i^2$  (15)

Misalkan  $L$  dibagi menjadi 15 bagian, maka  $\Delta x = \frac{L}{15} = \frac{75}{15} = 5$ .

Sehingga dengan menggunakan *software* Matlab diperoleh hasil perbandingan antara metode beda hingga (MBH) dengan metode elemen hingga (MEH) dari hasil matriks kekakuan (*stiffness matrix*) pada penyelesaian analitiknya pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1. Perbedaan Output Analitik dan Numerik

NO	y MBH	y MEH	y Analitik
1	0	0	-0.004
2	-4.9E+16	0.066667	-0.13575
3	-4.9E+16	0.133333	-0.26067
4	-4.9E+16	0.2	-0.37313
5	-4.9E+16	0.266667	-0.46845
6	-4.9E+16	0.333333	-0.54288
7	-4.9E+16	0.4	-0.59363
8	-4.9E+16	0.466667	-0.61881
9	-4.9E+16	0.533333	-0.6175
10	-4.9E+16	0.6	-0.58968
11	-4.9E+16	0.666667	-0.5363
12	-4.9E+16	0.733333	-0.45923
13	-4.9E+16	0.8	-0.36127
14	-4.9E+16	0.866667	-0.24617
15	-4.9E+16	0.933333	-0.11862
16	0	0	0.015767

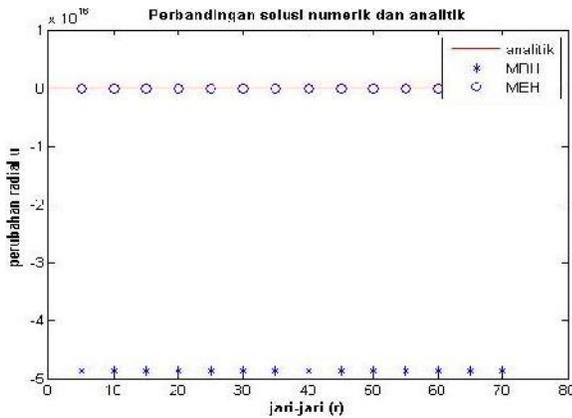
Dan diperoleh nilai galat (*error*) antara metode beda hingga dan metode elemen hingga pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2. Error antara Numerik dengan Analitik

NO	Error MBH	Error MEH
1	0.004	0.004
2	4.86E+16	0.202418

3	4.86E+16	0.394
4	4.86E+16	0.573125
5	4.87E+16	0.735113
6	4.87E+16	0.876218
7	4.87E+16	0.993632
8	4.87E+16	1.085481
9	4.87E+16	1.150831
10	4.87E+16	1.18968
11	4.87E+16	1.202965
12	4.87E+16	1.192558
13	4.86E+16	1.161268
14	4.86E+16	1.11284
15	4.86E+16	1.051956
16	0.015767	0.015767

Dan dari simulasi diperoleh grafik antara metode beda hingga, elemen hingga dan analitik yang disajikan pada Gambar 3.2.



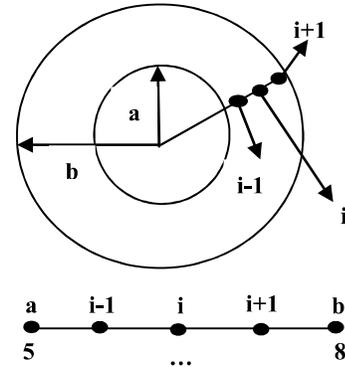
Gambar 3.2. Hasil Perbandingan Numerik dan Analitik

#### IV. Penerapan Metode Elemen Hingga dan Beda Hingga Pada Bejana Tekan

Jika diterapkan pada kasus bejana tekan yang diuji kemampuannya untuk menahan tekanan [3]. Untuk bejana tekan pada Gambar 4.1 dengan radius dalam  $a$  dan radius luar  $b$ , pergeseran dari setiap titik di sepanjang ketebalan bejana tekan yang diberikan dari persamaan differensial berikut [4]:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (16)$$

Misalkan radius dalam  $a = 5$  inchi, radius luar  $b = 8$  inchi, material bejana tekan yang digunakan baja ASTM A 36. Dengan kondisi batas  $u(a) = 0,0038731$  inchi dan  $u(b) = 0,0030769$  inchi.



Gambar. 4.1. Titik di sepanjang arah radial

Sedangkan dengan cara kedua menggunakan persamaan (4) dan (7) yang digunakan dalam persamaan (16) diperoleh [7]:

$$\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1u_{i+1}-u_{i-1}}{r_i 2(\Delta r)} - \frac{u_i}{r_i^2} = 0 \quad (17)$$

Sehingga persamaan (17) yang disederhanakan menjadi

$$\left[-\frac{1}{2r_i(\Delta r)} + \frac{1}{(\Delta r)^2}\right]u_{i-1} + \left[-\frac{2}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{r_i^2}\right]u_i + \left[\frac{1}{(\Delta r)^2} + 12r_i\Delta r u_i + 1\right] = 0 \quad (18)$$

Misalkan untuk  $n = 5$  maka total titik yang digunakan adalah 6. Maka dari persamaan (18)  $\Delta r = \frac{b-a}{n} = \frac{8-5}{5} = 0,6$

Sehingga apabila model bejana tekan diaplikasikan ke dalam metode beda hingga akan diperoleh bentuk:

$$\frac{1}{r^2} \left( r^2 \frac{d^2u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u \right) = 0 \quad (19)$$

Sehingga persamaan (19) dapat diubah ke dalam bentuk:

$$r^2 \frac{d^2u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = 0 \quad (20)$$

Dari persamaan (20) dengan sisi sebelah kiri adalah residual, maka dimasukkan dalam teorema Green diperoleh bentuk [6]:

$$\int_{r_1}^{r_2} \left( r^2 \frac{d^2u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u \right) \omega dr = 0$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \left( r^2 \frac{d^2u}{dr^2} \right) \omega dr + \int_{r_1}^{r_2} \left( r \frac{du}{dr} \right) \omega dr - \int_{r_1}^{r_2} u \omega dr = 0$$

$$\int_{r_1}^{r_2} r^2 \omega d \left( \frac{du}{dr} \right) + \int_{r_1}^{r_2} \left( r \frac{du}{dr} \right) \omega dr - \int_{r_1}^{r_2} u \omega dr = 0$$

$$\left[ r^2 \omega \left( \frac{du}{dr} \right) \right]_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} r^2 \frac{du}{dr} d\omega + \int_{r_1}^{r_2} \left( r \frac{du}{dr} - u \right) \omega dr = 0 \quad (21)$$

Dari persamaan (21) yang bentuk integral dipisah dengan yang sudah tidak memiliki integral, maka diperoleh bentuk:

$$\left[ r^2 \omega \left( \frac{du}{dr} \right) \right]_{r_1}^{r_2} = \int_{r_1}^{r_2} r^2 \frac{du}{dr} d\omega - \int_{r_1}^{r_2} \left( r \frac{du}{dr} - u \right) \omega dr \quad (22)$$

Dan persamaan (22) dapat ditemukan bentuk LHS (Left Hand Side) dan RHS (Right Hand Side)nya dari persamaan yang diperoleh [5]:

$$\int_{r_1}^{r_2} \left( r^2 \frac{du}{dr} \frac{d\omega}{dr} - \left( r \frac{du}{dr} - u \right) \omega \right) dr = \left[ r^2 \omega \left( \frac{du}{dr} \right) \right]_{r_1}^{r_2} \quad (23)$$

Sehingga dari persamaan (23) dapat diperoleh bentuk fungsi basisnya seperti dalam persamaan (12) diperoleh [5]:

$$u(\xi) = \varphi_1(\xi)t_1 + \varphi_2(\xi)t_2 + \varphi_3(\xi)t_3 + \varphi_4(\xi)t_4 \quad (24)$$

$$u = \varphi_i t_i \quad i = 1,2,3,4 \quad \text{dan} \quad w = \varphi_j \quad j = 1,2,3,4$$

$$r = \frac{1}{n} \xi \text{ dan } \frac{dr}{d\xi} = \frac{1}{n}$$

Sehingga dari persamaan (24) yang dimasukkan ke dalam persamaan (23) diperoleh [2]:

$$E_{ij} = \int_{\xi=0}^{\xi=1} \left( r^2 \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} \frac{d\omega}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} - \left( r \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} - \varphi_i t_i \right) \varphi_j \right) \left[ \frac{dr}{d\xi} \right] d\xi$$

$$= t_i \int_{\xi=0}^{\xi=1} \left( r^2 \frac{d\varphi_i}{d\xi} \frac{d\varphi_j}{d\xi} \left( \frac{d\xi}{dr} \right)^2 - \left( r \frac{d\varphi_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} - \varphi_i \right) \varphi_j \right) \left[ \frac{dr}{d\xi} \right] d\xi \quad (25)$$

Sehingga dengan menggunakan *software* Matlab diperoleh hasil perbandingan antara metode beda hingga (MBH) dengan metode elemen hingga (MEH) dari hasil matriks kekakuan (*stiffness matrix*) pada penyelesaian analitiknya pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1. Perbedaan Output Analitik dan Numerik

NO	y MBH	y MEH	yAnalitik
1	0.003873	0	-0.004
2	0	0.00832	-0.13575
3	0	0.00673	-0.26067
4	0	0.004191	-0.37313
5	0	-0.03224	-0.46845
6	0	-0.027	-0.54288
7	0	-0.01716	-0.59363
8	0	0.12484	-0.61881
9	0	0.104784	-0.6175
10	0	0.066666	-0.58968
11	0	-0.48346	-0.5363
12	0	-0.40584	-0.45923
13	0	-0.25822	-0.36127
14	0	1.872265	-0.24617
15	0	1.571671	-0.11862
16	0.003077	0	0.015767

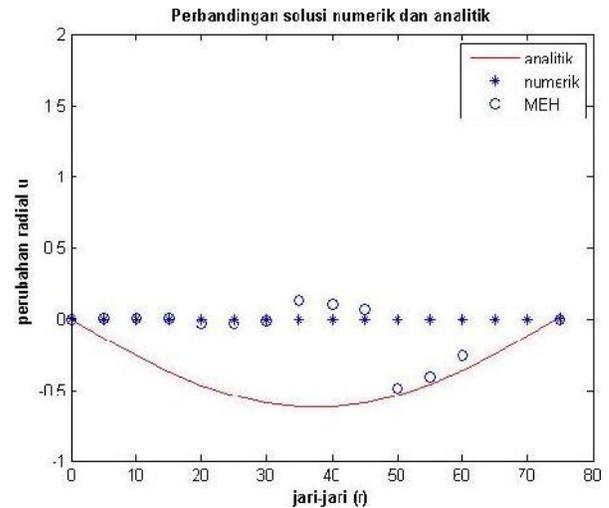
Dan diperoleh nilai galat (*error*) antara metode beda hingga dan metode elemen hingga pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2. Error antara Numerik dengan Analitik

NO	Error MBH	Error MEH
1	0.007873	0.004
2	0.135752	0.144072
3	0.260666	0.267396
4	0.373125	0.377316
5	0.468446	0.436211
6	0.542885	0.515881

7	0.593632	0.57647
8	0.618815	0.743655
9	0.617497	0.722282
10	0.58968	0.656346
11	0.536298	0.052838
12	0.459225	0.053387
13	0.361268	0.103049
14	0.246174	2.118439
15	0.118622	1.690293
16	0.01269	0.015767

Dan dari simulasi diperoleh grafik antara metode beda hingga, elemen hingga dan analitik yang disajikan pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2. Hasil Perbandingan Numerik dan Analitik

### III. KESIMPULAN/RINGKASAN

Dari hasil penelitian di atas diperoleh bahwa penerapan metode elemen hingga dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan nilai batas yang banyak diterapkan dalam permasalahan fisika dan tingkat akurasi lebih baik daripada menggunakan metode beda hingga. Penggunaan elemen hingga memberikan galat relatif lebih baik daripada beda hingga.

Untuk pengembangan lebih lanjut dapat diteliti permasalahan ini dalam bentuk dua dimensi atau dibandingkan dengan metode yang lain seperti Runge Kutta atau yang lain.

### UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis T.Y. mengucapkan terima kasih kepada Dekan MIPA UIM, Kajur Matematika UIM, dosen-dosen serta beberapa mahasiswa Matematika UIM yang telah memberikan dukungan baik secara finansial (materil) maupun moril dalam pengembangan penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Alfuruqi, "Interpolasi Linear Kuadratik, Polinomial dan Lagrange" Politeknik Elektronika: Surabaya (2014).
- [2] Az, "Integral Vektor" Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Universitas Brawijaya: Malang (2014).
- [3] D. Satrijo dan H.S. Alif, "Perancangan dan Analisa Tegangan Pada Bejana Tekan Horizontal Dengan Metode Elemen Hingga," Fakultas Teknik Mesin Universitas Diponegoro: Semarang (2012).
- [4] E. Rainarli, "Simulasi Perancangan Bejana Tekan Dengan Menggunakan Metode Beda Hingga," Jurnal Ilmiah Komputer dan Informatika (KOMPUTA). Vol. 1 No. 2, Fakultas Teknik dan Ilmu Komputer Universitas Komputer Indonesia: Bandung (2012).
- [5] P. Hunter, *FEM/BEM Notes*. Jurusan Sains Teknik Universitas Auckland, Selandia Baru (2001).
- [6] P.K. Buyung, *Teori dan Aplikasi Metode Elemen Hingga*. Penerbit: ANDI, Yogyakarta (2012).
- [7] W. Destyanto, "Simulasi Numerik Perpindahan Panas Konveksi Alami Pada Lapisan Batas Aliran Laminar Dengan Metode Beda Hingga," Jurusan teknik Mesin Universitas Sebelas Maret: Surakarta (2007).